4°/ a) Soit $h(x)=x-g(x)$ et $x\geq 0$. h est continue, dérivable sur $[0,+\infty[$,

$h'(x)=1-g'(x)=1-\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}\geq 0$.

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	0	$+$	
$h(x)$	0	↗	

$\forall x>0$ on a : $h(x)>0$ d'où $0<x-g(x)$.

• Soit $k(x)=x-g(x)-\dfrac{x^3}{3}$ $(x\geq 0)$

k est continue, dérivable sur $\mathbf{R}_+$

$k'(x)=1-g'(x)-x^2=\dfrac{x^2}{1+x^2}-x^2=\dfrac{-x^4}{1+x^2}\leq 0$

x	0		$+\infty$
$k'(x)$	0	$-$	
$k(x)$	0	↘	
		$(-)$	

d'où $\forall x>0$ on a : $k(x)<0$ d'où $x-g(x)<\dfrac{x^3}{3}$.

b) $\forall x>0$ on a : $0<x-g(x)<\dfrac{x^3}{3}$ d'où $-\dfrac{x}{3}<\dfrac{g(x)-x}{x^2}<0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{x}{3}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-x}{x^2}=0$

• $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(-t)+t}{t^2}$ $(t=-x)$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}-\left(\dfrac{g(t)-t}{t^2}\right)=0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-x}{x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-x}{x^2}=0$.

5°/ Soit $\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$x\mapsto\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

$D_\phi=\mathbf{R}$; $\forall x\in\mathbf{R}$, $-x\in\mathbf{R}$.